

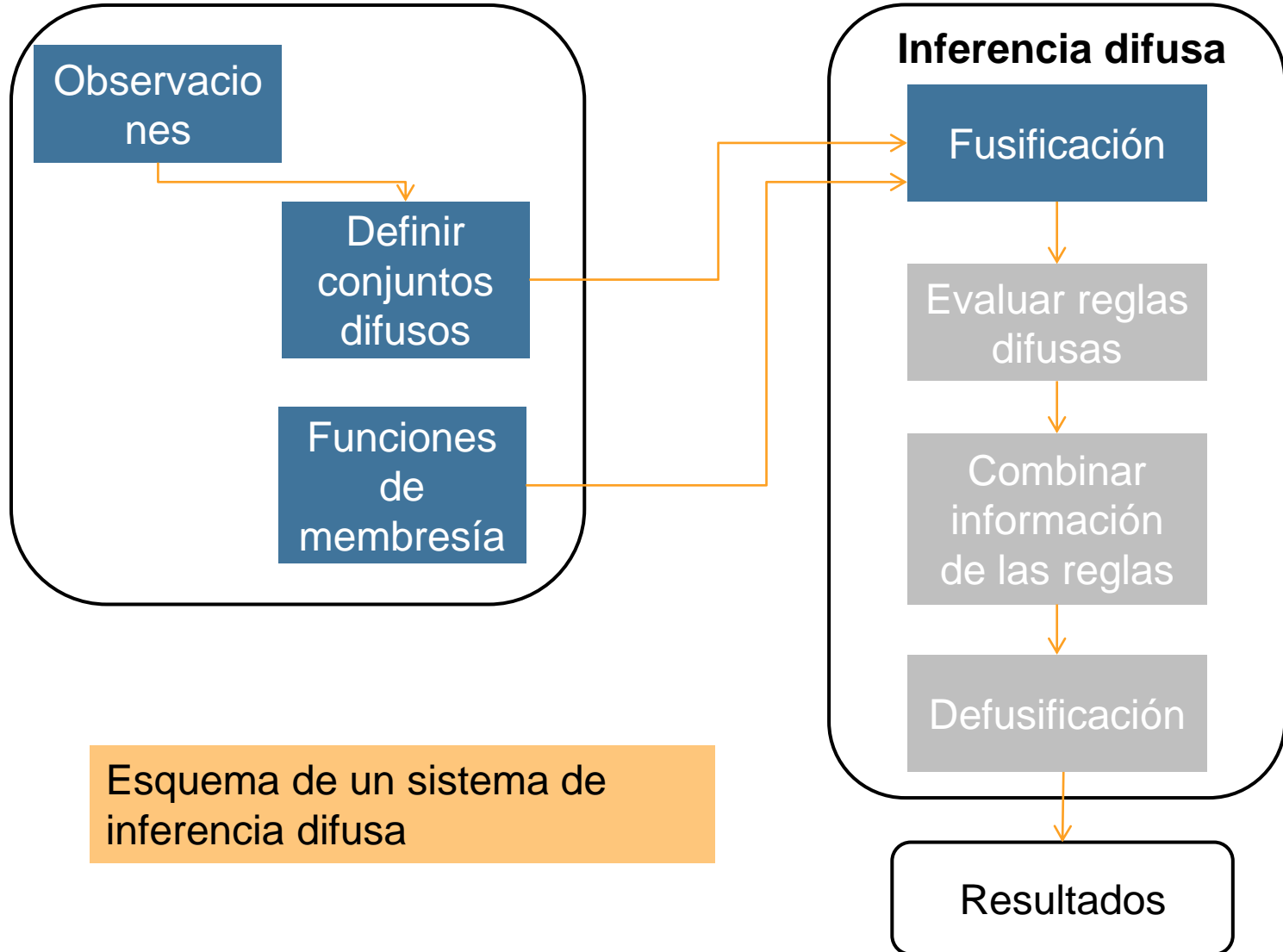
# LÓGICA DIFUSA

Conjuntos difusos  
Blanca A. Vargas Govea  
[vargasgovea@itesm.mx](mailto:vargasgovea@itesm.mx)

Noviembre 2, 2012  
Inteligencia Computacional

# Sistemas de inferencia difusa

2



# Fusificación

3

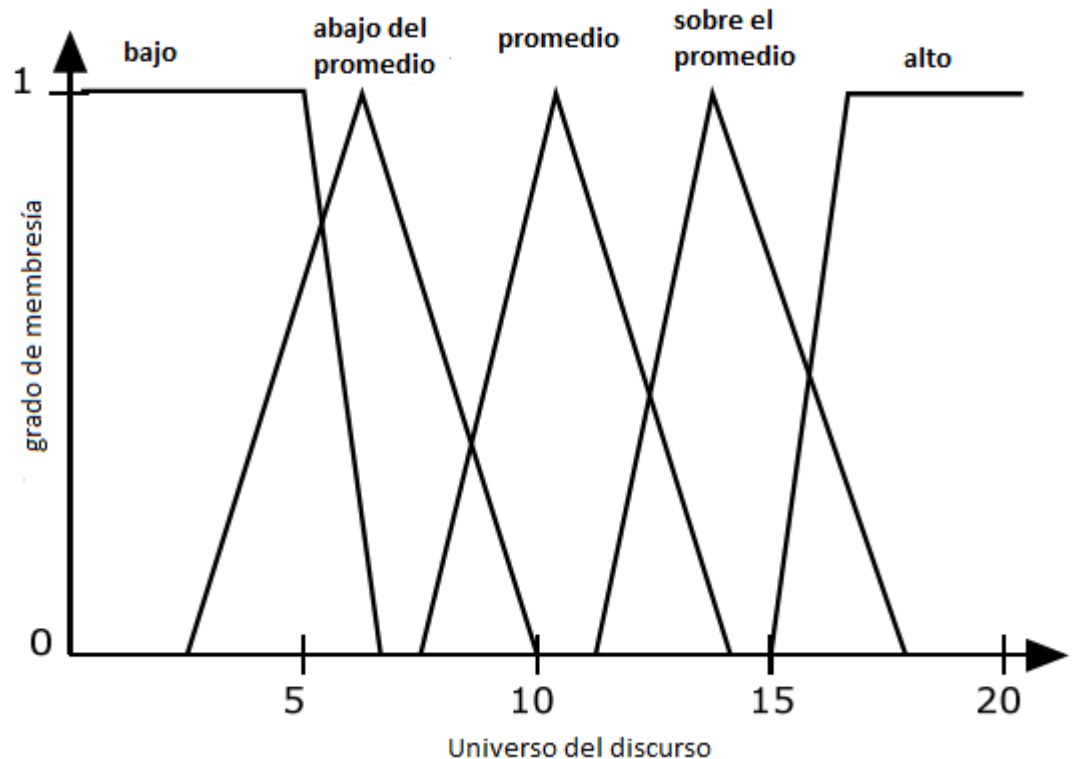
- Las entradas ordinarias (*crisp*) se transforman en **entradas difusas**.
- Cada entrada tiene su propio grupo de **funciones de membresía** o **conjuntos difusos**.
- El grupo de funciones de membresía existe dentro de un universo del discurso.
- **Universo del discurso**: valores que las entradas ordinarias pueden tener.

# Ejemplo

4

El universo del discurso se divide en cinco conjuntos difusos: bajo, abajo del promedio, promedio, sobre el promedio y alto.

Las funciones asociadas de membresía tienen forma triangular y trapezoidal.



# Selección de etiquetas

5

- Determinar las etiquetas ó categorías para las funciones de membresía (e.g., bajo, alto).
- Número de etiquetas: número de regiones en las que se dividirá el universo.
- Cada etiqueta describe una región ó comportamiento.
- La adecuada selección de etiquetas evita pérdida de información.

# Alcance y forma de la función

6

- El alcance ó dominio de la función representa el **rango de valores** sobre el que se mapea la función.
- La forma de la función debe ser **representativa** de la variable.
- Formas complicadas requieren ecuaciones más complejas.

# En lógica clásica

7

- La función de membresía solamente puede tomar dos valores:

$$f_A(x): X \rightarrow \{0,1\}$$

- Es 1 cuando  $x$  pertenece a  $A$  y 0 en caso contrario.

$$f_A = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

# En lógica difusa

8

- Un conjunto difuso  $A$  está definido por una función de membresía

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$$

- Rango de valores entre 0 y 1.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ totalmente en } A \\ 0, & x \text{ no está en } A \\ \in (0,1), & x \text{ parcialmente en } A \end{cases}$$



# Representando conjuntos difusos

9

- Diagramas de Venn: no son apropiados.
- Conjuntos ordinarios: cortes claros en sus fronteras.
- Conjuntos difusos: representan niveles o grados.

# Representando conjuntos difusos

10

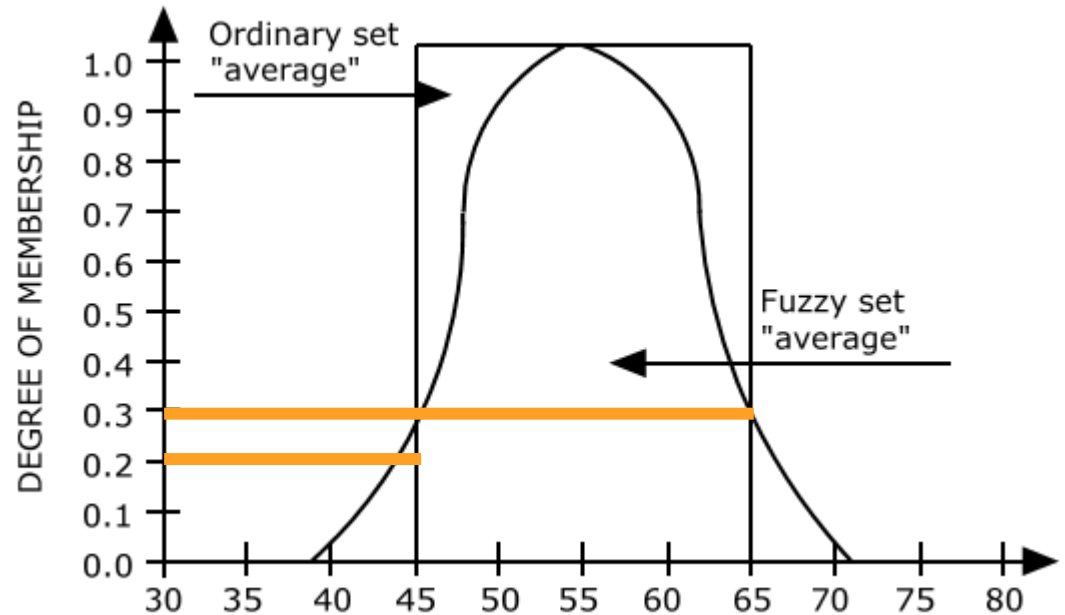
## Lógica ordinaria

44 es joven

46 es de mediana edad

## Lógica difusa

44 es de mediana edad con un grado de membresía de 0.2  
46 es de mediana edad con un grado de membresía de 0.3



# Representando conjuntos difusos

11

- **Términos difusos**: variables lingüísticas como bajo, alto, frío, calor, rápido, lento.
- **Sub-división difusa**: proceso de representar conjuntos de valores usando variables lingüísticas.
- Las variables lingüísticas pueden agruparse en **etiquetas** ó categorías lingüísticas.
- Las etiquetas pueden representarse por **funciones de membresía estándar**.

# Funciones de membresía estándar

12

Singleton

Triangular

Trapezoidal

Sigmoide

Función-Z

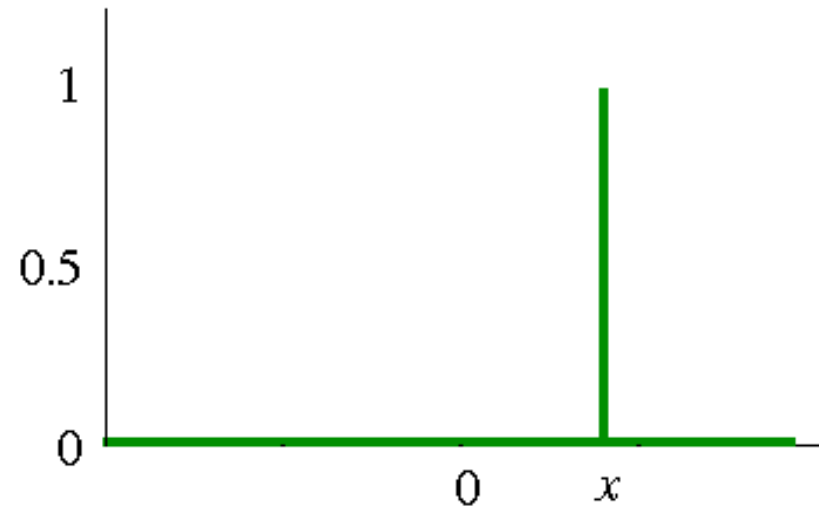
Gaussiana

Campana  
generalizada

# Singleton

13

- $x = a$ , donde  $a$  es un escalar.
- Define un conjunto difuso cuya función de membresía es 0 excepto en el punto  $x$ , donde es igual a 1.

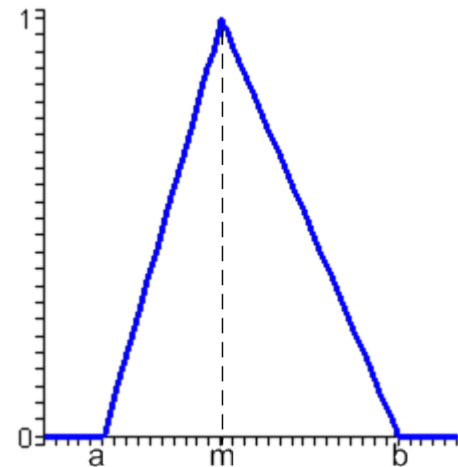


# Triangular

14

Definida por un límite inferior  $a$ , un límite superior  $b$  y un valor  $m$ , donde  $a < m < b$ .

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a}, & a < x \leq m \\ \frac{b-x}{b-m}, & m < x < b \\ 0, & x \geq b \end{cases}$$

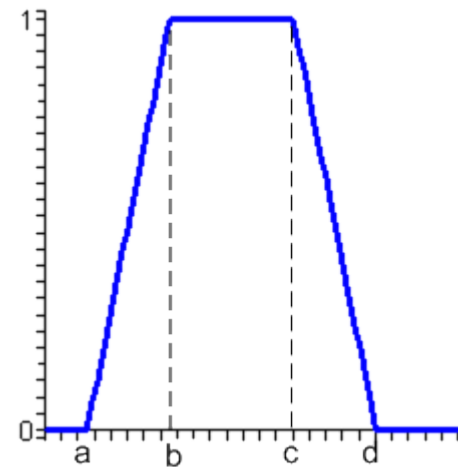


# Trapezoidal

15

Definida por un límite inferior  $a$ , un límite superior  $d$ , un límite de soporte bajo  $b$  y un límite de soporte alto  $c$ , donde  $a < b < c < d$ .

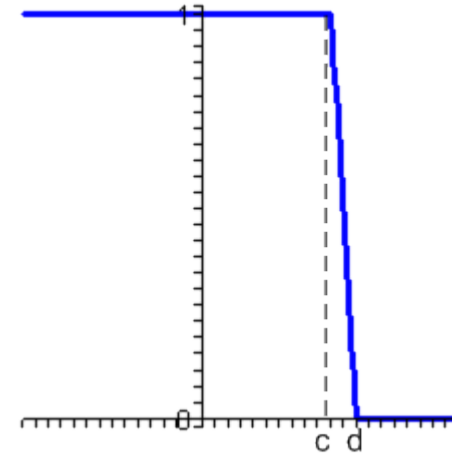
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & (x < a) \text{ ó } (x > d) \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \geq x \geq d \end{cases}$$



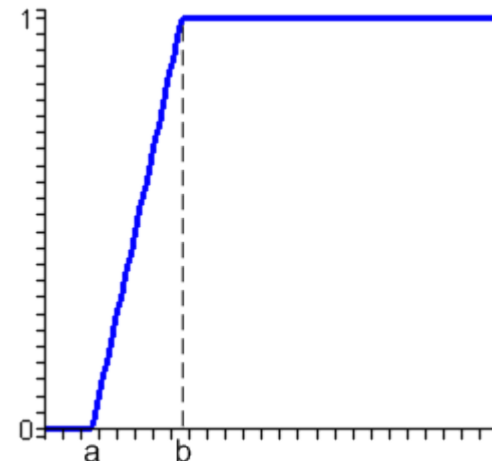
# Trapezoidal – funciones R y L

16

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x > d \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 1, & x < c \end{cases}$$



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

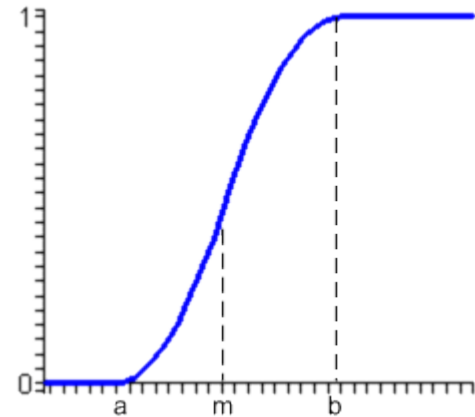




# Sigmoide – función-S

17

Definida por un límite inferior  $a$ , un límite superior  $b$  y el punto de inflexión  $m$ , tales que  $a < m < b$ . El crecimiento es más lento cuanto mayor sea la distancia  $a-b$ .



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 2 \left[ \frac{x-a}{b-a} \right]^2, & a < x \leq m \\ 1 - 2 \left[ \frac{x-b}{b-a} \right]^2, & m < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

**Función-Z**

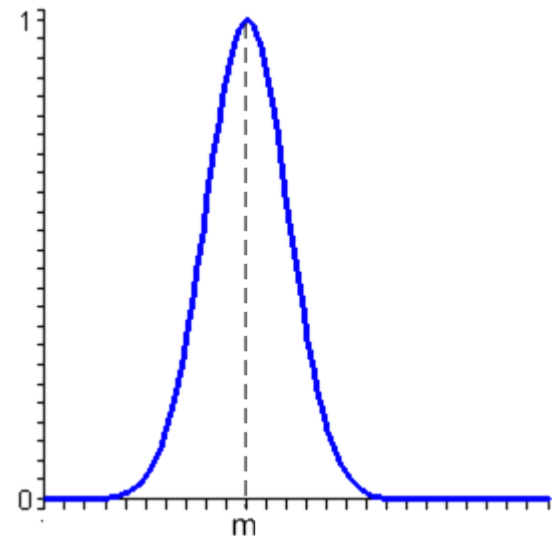
$$Z(x) = 1 - S(x)$$

# Gaussiana

18

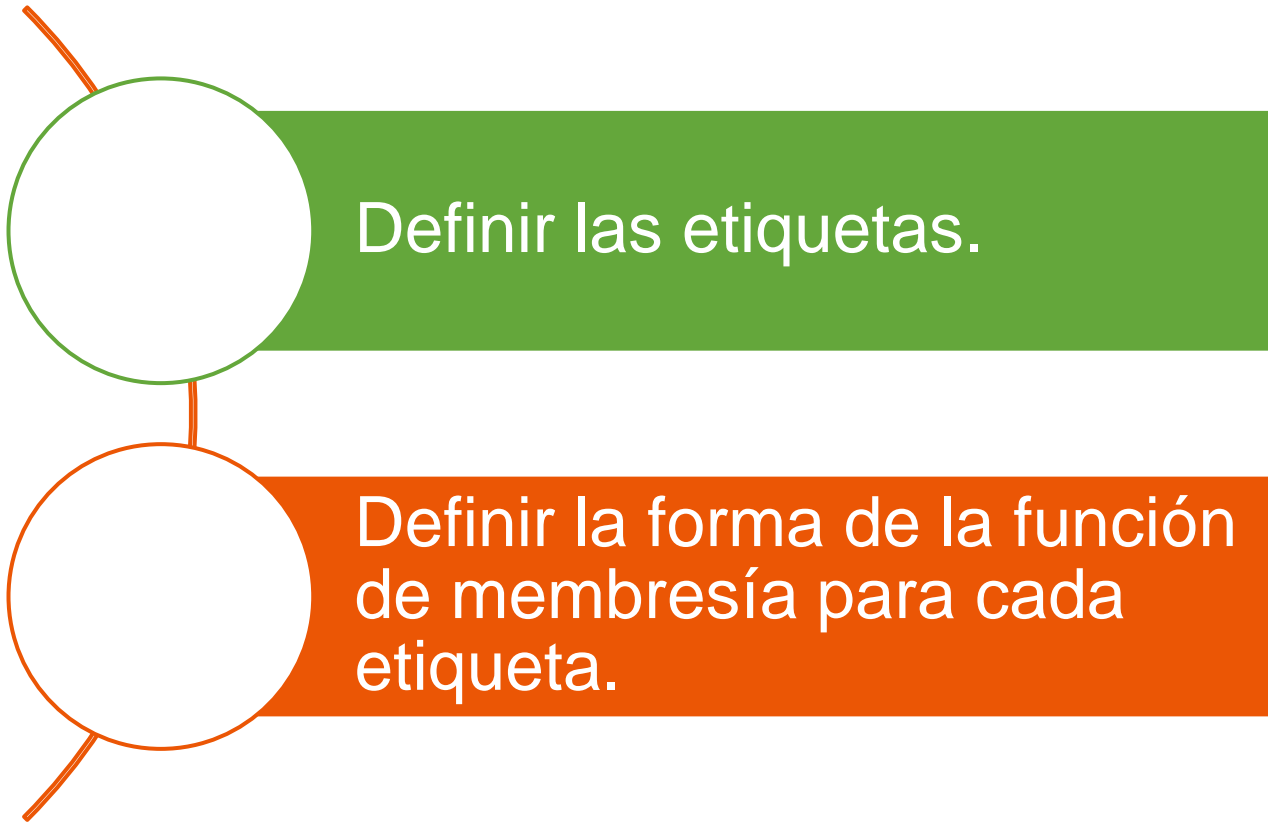
Definida por su valor medio  $m$  y el parámetro  $k > 0$ .  
Mientras menor es  $k$ , más estrecha es la campana.

$$\mu_A(x) = e^{\frac{-(x-m)^2}{2k^2}}$$



# Pasos para sub-división

19



# Conjuntos difusos

20

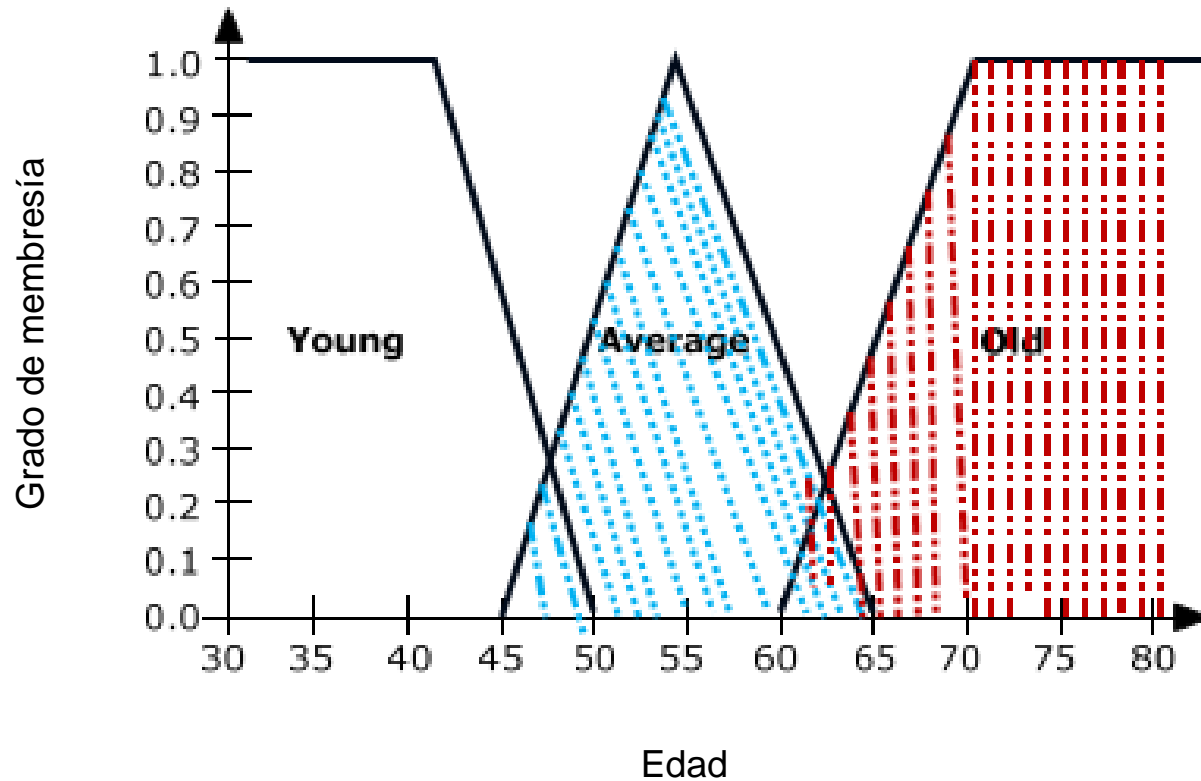
Entradas

Ejemplo de la vejez.  
Considerar que la edad de un grupo de personas varía entre 30 y 80 años. En la tabla se presenta el grado de membresía tanto en la lógica difusa como para la lógica clásica.

Edad	Grado de membresía	
	Lógica difusa	Lógica ordinaria
30	0.0	0.0
35	0.1	0.0
40	0.2	0.0
45	0.3	0.0
50	0.4	1.0
55	0.5	1.0
60	0.6	1.0
65	0.7	1.0
70	0.8	1.0
75	0.9	1.0
80	1.0	1.0

# Conjuntos difusos

21



# Conjuntos difusos

22

Un sub-conjunto difuso  $A$  puede expresarse como:

$$A = \{x_1, \mu_A(x_1)\}, \{x_2, \mu_A(x_2)\}, \dots, \{x_n, \mu_A(x_n)\}$$

Ejemplo:

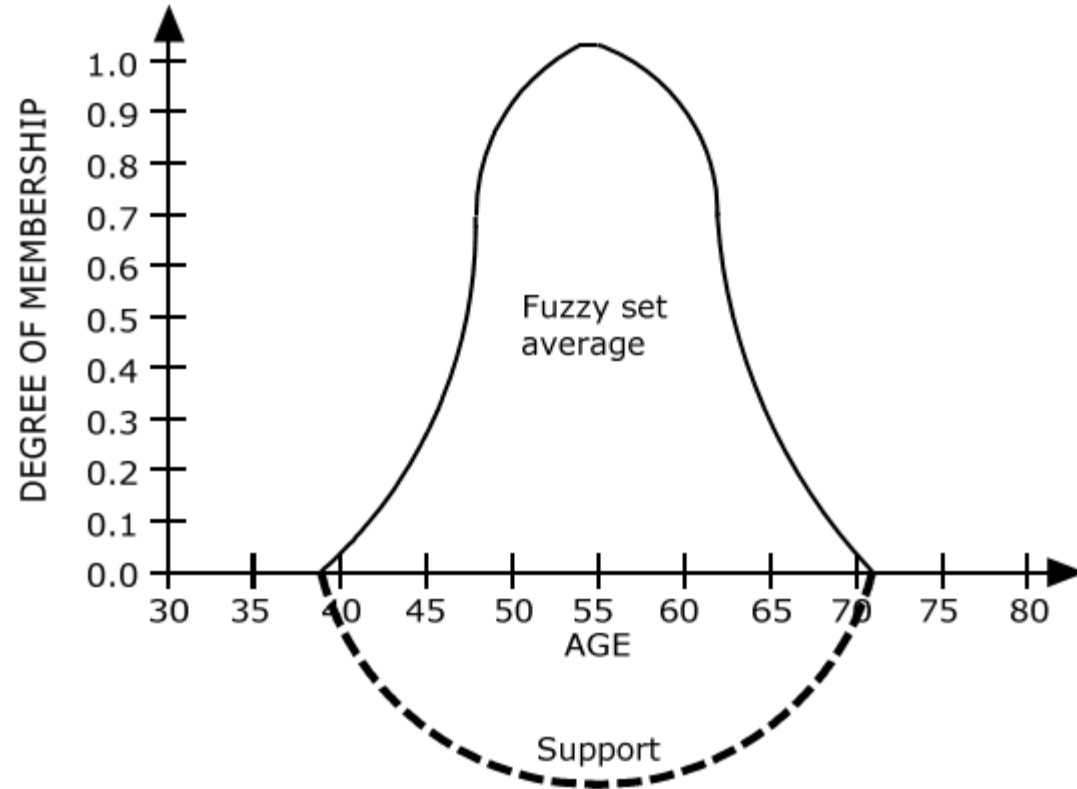
$$\text{Viejo} = \text{CD}[\{30,0\},\{35,0.1\},\{40,0.2\}]$$

# Conjuntos difusos

23

**Soporte:** es el subconjunto cuyos elementos tienen un grado de membresía diferente de cero.

$$\text{Soporte}(A) = \{x | x \in X, \mu_A(x) > 0\}$$



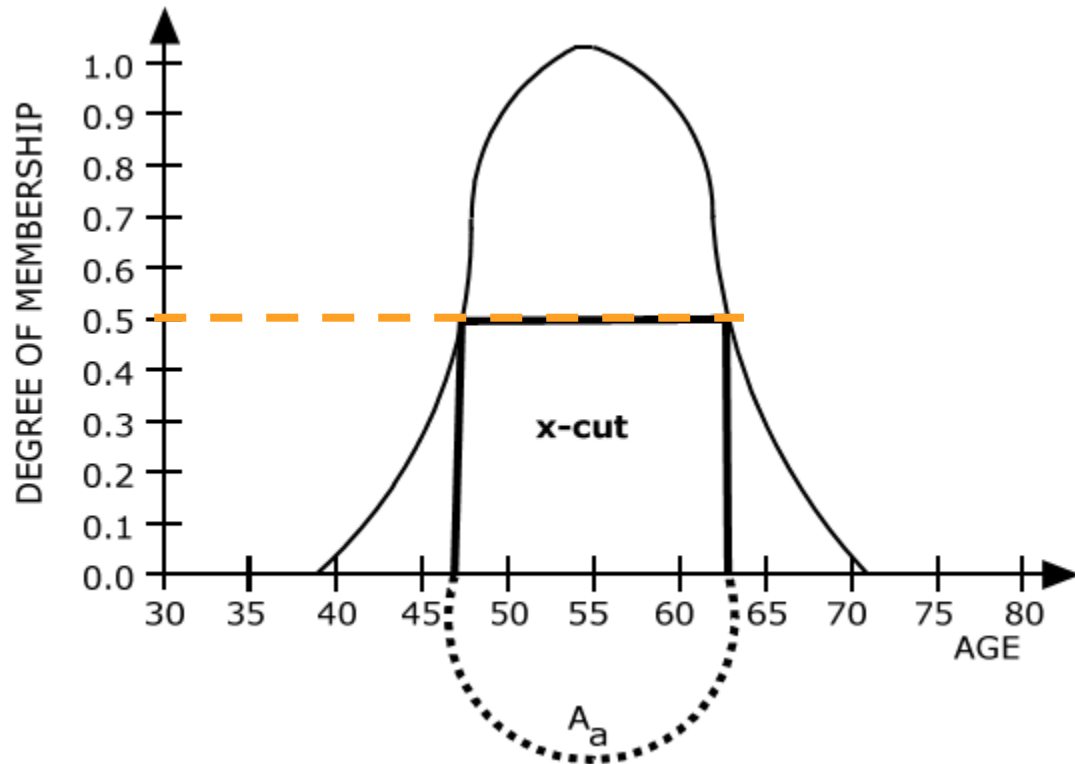
El soporte para el conjunto promedio es el intervalo [39,71].

# Conjuntos difusos

24

**Normal:** si su función de membresía tiene valor de 1 para al menos un elemento.

**x-corte:** sub-conjunto con valores menores o mayores que un valor dado  $x \in [0,1]$



X-corte de 0.5



# Operaciones

25

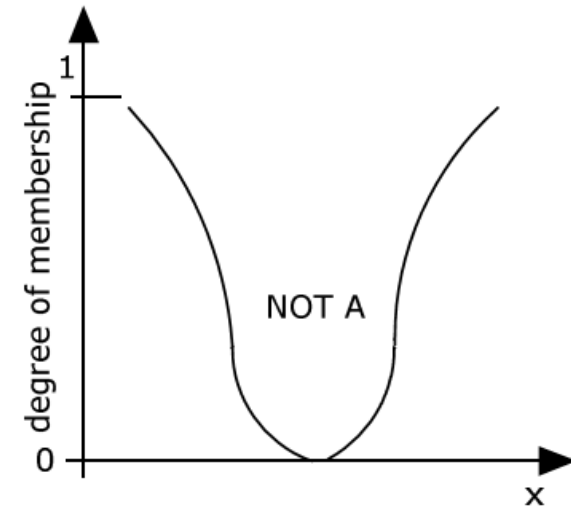
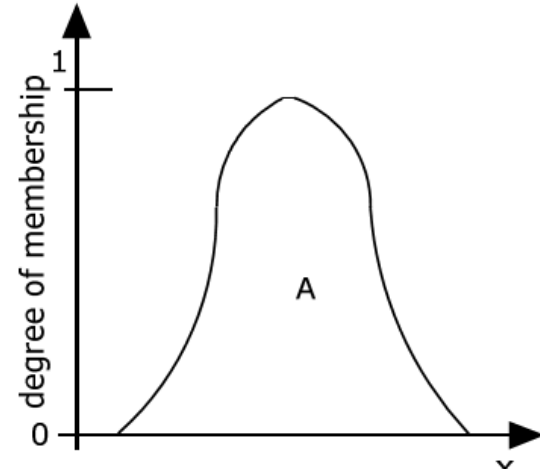
Complemento:

Personas viejas =

$\{30,0\}, \{40,0.2\}, \{50,0.4\},$   
 $\{60,0.6\}, \{70,0.8\}, \{80,1\}$

Personas no-viejas =

$\{30,1\}, \{40,0.8\}, \{50,0.6\},$   
 $\{60,0.4\}, \{70,0.2\}, \{80,0\}$



# Operaciones

26

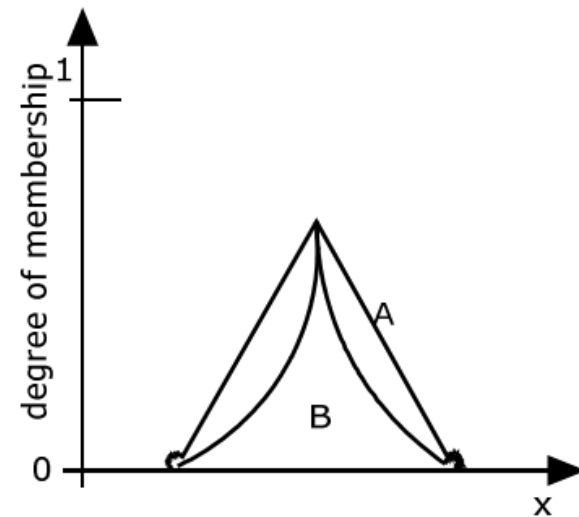
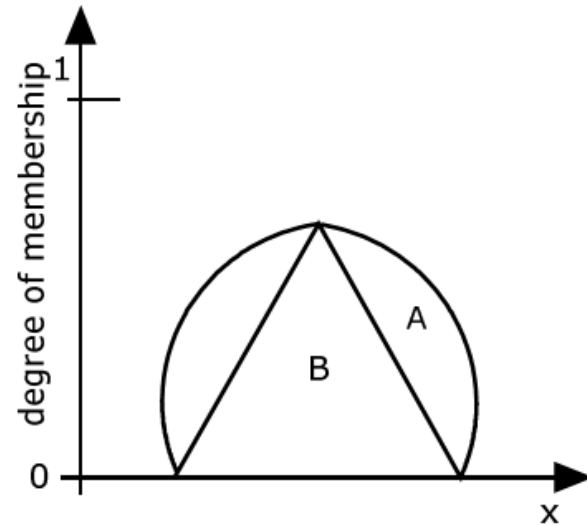
Contención:

Personas viejas =

$\{60, 0.6\}, \{65, 0.7\}, \{70, 0.8\}, \{75, 0.9\}, \{80, 1\}$

Personas muy viejas =

$\{60, 0.6\}, \{65, 0.67\}, \{70, 0.7\}, \{75, 0.8\}, \{80, 0.95\}$



# Operaciones

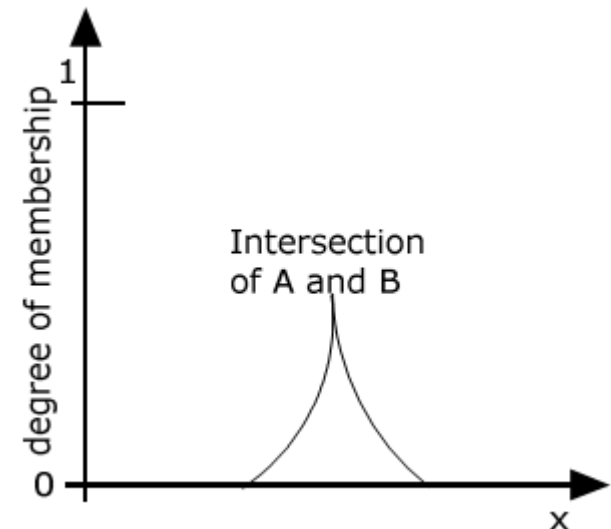
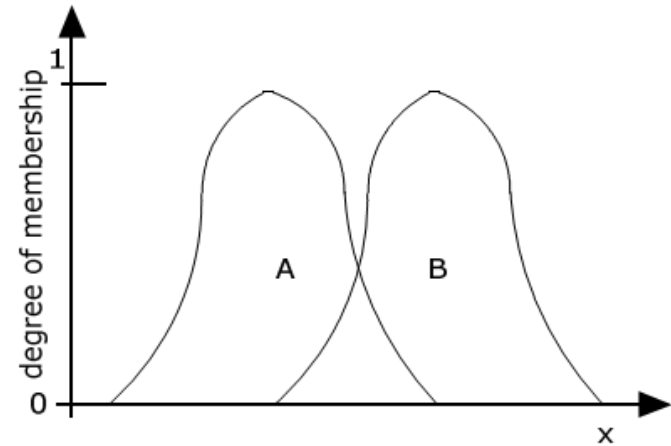
27

Intersección (min):

Personas viejas =  
{30,0},{40,0.1},{50,0.2},{60,0.6},{  
65,0.7},{70,0.8},{75,0.9},{80,1}

Personas mediana-edad =  
{30,0.1},{40,0.2},{50,0.6},{60,0.5}  
,{65,0.2},{70,0.1},{75,0},{80,0}

Personas viejas  $\cap$  Personas de  
mediana edad =  
{30,0},{40,0.1},{50,0.2},{60,0.5},{  
65,0.2},{70,0.1},{75,0},{80,0}



# Operaciones

28

Unión (max):

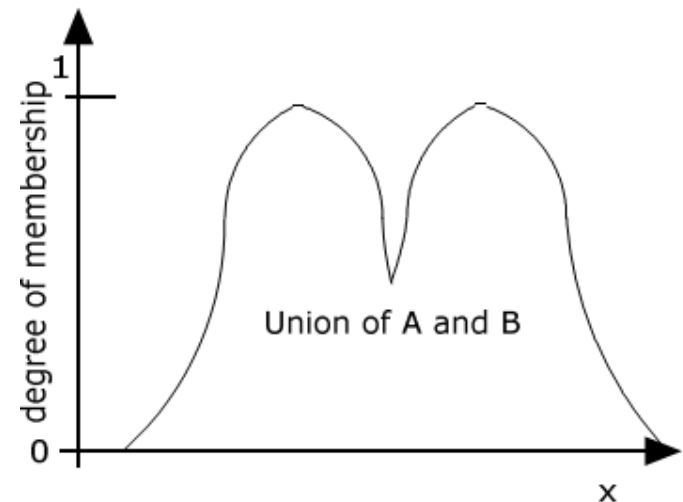
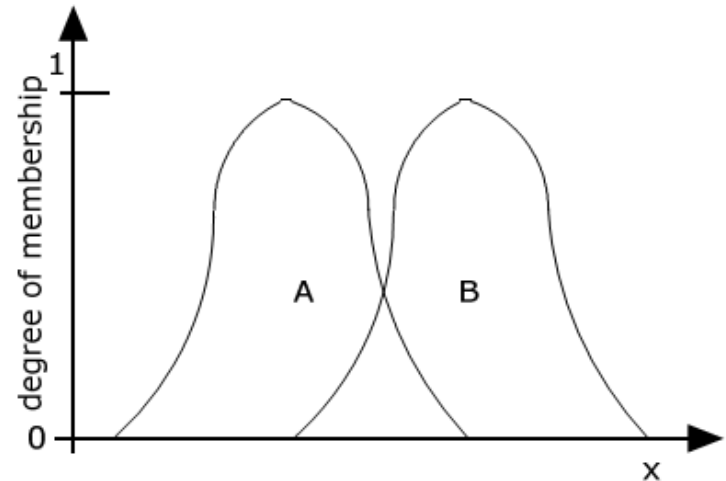
Personas viejas =  
{30,0}, {40,0.1}, {50,0.2}, {60,0.6}, {  
65,0.7}, {70,0.8}, {75,0.9}, {80,1}

Personas mediana-edad =

{30,0.1}, {40,0.2}, {50,0.6}, {60,0.5}  
, {65,0.2}, {70,0.1}, {75,0}, {80,0}

Personas viejas  $\cup$  Personas de  
mediana edad =

{30,0.1}, {40,0.2}, {50,0.6}, {60,0.6}  
, {65,0.7}, {70,0.8}, {75,0.9}, {80,1}



# Consideraciones

29

- Pocas funciones de membresía pueden originar respuesta lenta: **oscilación**.
- Demasiadas funciones pueden originar grandes cambios en la salidas: **inestabilidad**.
- Las funciones deben traslaparse.
- Cada punto del universo debe pertenecer al menos a una función.

# Ejercicios

30

1. Dados los siguientes conjuntos difusos

$$A = \{1,0.4\},\{2,0.6\},\{3,0.7\},\{4,0.8\}$$

$$B = \{1,0.3\},\{2,0.65\},\{3,0.4\},\{4,0.1\}$$

Calcula:

- Unión
- Intersección
- Complemento

2. Dada la variable “peso” de una persona. Crea 3 conjuntos difusos peso-bajo, normal y sobrepeso. Al dar el peso de una persona, calcular su grado de membresía para cada conjunto difuso.

# Tarea

31

- Viernes Nov.9. Avance de proyecto.
  - Presentación al grupo (Power-Point).
  - Implementación hasta el momento.
  - Reporte (Latex).

# Referencias

32

- Intelligent Systems. A modern approach. Crina Grosan and Ajith Abraham. 2011.
- Imágenes de funciones de membresía  
<http://ib.cnea.gov.ar/~thelerg/melon/doc/html/ch05s04.html>,  
<http://www.dma.fi.upm.es/java/fuzzy/tutfuzzy/contenido3.html>